

000025

This Question Paper consists of 33 questions and 11 Printed pages + Graph sheet.

इस प्रश्न-पत्र में 33 प्रश्न तथा 11 मुद्रित पृष्ठ + ग्राफ शीट हैं।

Roll No.

Code No.

कोड नं.

54/ASS/4

MATHEMATICS

गणित

(311)

Set/सेट

A

Day and Date of Examination

(परीक्षा का दिन व दिनांक)

Signature of Invigilators

(निरीक्षकों के हस्ताक्षर)

2

General Instructions:

1. Candidate must write his/her Roll Number on the first page of the Question Paper.
 2. Please check the Question Paper to verify that the total pages and total number of questions contained in the Question Paper are the same as those printed on the top of the first page. Also check to see that the questions are in sequential order.
 3. Making any identification mark in the Answer-Book or writing Roll Number anywhere other than the specified places will lead to disqualification of the candidate.
 4. Write your Question Paper Code No. **54 / ASS / 4-A** on the Answer-Book.
 5. (a) The Question Paper is in English/Hindi medium only. However, if you wish, you can answer in any one of the languages listed below :
English, Hindi, Urdu, Punjabi, Bengali, Tamil, Malayalam, Kannada, Telugu, Marathi, Oriya, Gujarati, Konkani, Manipuri, Assamese, Nepali, Kashmiri, Sanskrit and Sindhi.
You are required to indicate the language you have chosen to answer in the box provided in the Answer-Book.
 - (b) If you choose to write the answer in the language other than Hindi and English, the responsibility for any errors/mistakes in understanding the question will be yours only.

सामान्य अनुदेश :

- परीक्षार्थी प्रश्न-पत्र के पहले पृष्ठ पर अपना अनुक्रमांक अवश्य लिखें।
 - कृपया प्रश्न-पत्र को जाँच लें कि प्रश्न-पत्र के कुल पृष्ठों तथा प्रश्नों की उतनी ही संख्या है जितनी प्रथम पृष्ठ के सबसे ऊपर छपी है। इस बात की जाँच भी कर लें कि प्रश्न क्रमिक रूप में हैं।
 - उत्तर-पुस्तिका में पहचान-चिह्न बनाने अथवा निर्दिष्ट स्थानों के अतिरिक्त कहीं भी अनुक्रमांक लिखने पर परीक्षार्थी को अयोग्य ठहराया जायेगा।
 - अपनी उत्तर-पुस्तिका पर प्रश्न-पत्र की कोड संख्या **54 / ASS / 4-A** लिखें।
 - (क) प्रश्न-पत्र केवल हिंदी/अंग्रेजी में है। फिर भी, यदि आप चाहें तो नीचे दी गई किसी एक भाषा में उत्तर दे सकते हैं : अंग्रेजी, हिंदी, उर्दू, पंजाबी, बँगला, तमिल, मलयालम, कन्नड़, तेलुगू, मराठी, उडिया, गुजराती, कोंकणी, मणिपुरी, असमिया, नेपाली, कश्मीरी, संस्कृत और सिंधी।
कृपया उत्तर-पुस्तिका में दिए गए बॉक्स में लिखें कि आप किस भाषा में उत्तर लिख रहे हैं।
 - (ख) यदि आप हिंदी एवं अंग्रेजी के अतिरिक्त किसी अन्य भाषा में उत्तर लिखते हैं तो प्रश्न को समझने में होने वाली त्रुटियों/गलतियों की जिम्मेदारी केवल आपकी होगी।



MATHEMATICS

गणित

(311)

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 100

समय : 3 घण्टे]

[पूर्णांक : 100

- Note :
- (1) This question paper consists of four Sections A, B, C and D containing 33 questions.
 - (2) Question Number 1 to 10 in Section A are multiple choice questions (MCQ). Each question carries one mark. In each question there are four choices (A), (B), (C) and (D) of which only one is correct. You have to select the correct choice and indicate it in your answer book by writing (A), (B), (C) or (D) as the case may be. No separate time is allotted for attempting MCQ.
 - (3) Question Number 11 to 16 in Section B are very short answer questions and carry 2 marks each.
 - (4) Question Number 17 to 28 in Section C are short answer questions and carry 4 marks each.
 - (5) Question Number 29 to 33 in Section D are long answer questions and carry 6 marks each.
 - (6) All question are compulsory. There is no overall choice, however, alternative choices are given in some questions. In such questions, you have to attempt only one choice.

- निर्देश :
- (1) इस प्रश्नपत्र में कुल 33 प्रश्न हैं, जो चार खण्डों अ, ब, स तथा द में विभाजित हैं।
 - (2) खण्ड - अ में प्रश्न संख्या 1 से 10 तक बहुविकल्पीय प्रश्न हैं, जिनमें प्रत्येक के लिए 1 अंक निर्धारित है। प्रत्येक प्रश्न के उत्तर के रूप में (A), (B), (C) तथा (D) चार विकल्प दिए गए हैं जिनमें से कोई एक सही है। आपको सही विकल्प चुनना है तथा अपनी उत्तर पुस्तिका में (A), (B), (C) तथा (D) में जो सही हो उत्तर के रूप में लिखना है। बहुविकल्पीय प्रश्न हल करने के लिए अलग से समय नहीं दिया गया है।
 - (3) खण्ड - ब में प्रश्न संख्या 11 से 16 तक अति लघुउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 2 अंक निर्धारित हैं।
 - (4) खण्ड - स में प्रश्न संख्या 17 से 28 तक लघुउत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 4 अंक निर्धारित हैं।
 - (5) खण्ड - द में प्रश्न संख्या 29 से 33 तक दीर्घ उत्तरीय प्रश्न हैं तथा प्रत्येक के 6 अंक निर्धारित हैं।
 - (6) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। पूर्ण प्रश्नपत्र में विकल्प नहीं है, फिर भी कुछ प्रश्नों में, आंतरिक विकल्प हैं। ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है।



SECTION - A

ਖਣਡ - ਅ

1. Let A be a unit matrix of order 3×3 . Then $|4A|$ equals :

माना A एक 3×3 का एक इकाई आव्यूह है। $|4A|$ का मान है :

2. If $\tan^{-1} x = 1$, then $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ equals :

यदि $\tan^{-1} x = 1$ है तो $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x$ बराबर है :

3. The distance of the plane $3x + 2y + 6z - 49 = 0$ from the point $(6, 9, 1)$ is :

समतल $3x + 2y + 6z - 49 = 0$ की बिंदु $(6, 9, 1)$ से दूरी है :

4. Which of the following sentences is **not** a statement?

- (A) Two is greater than one
 - (B) Every series is not infinite
 - (C) Kanpur is how many kilometer from Delhi ?
 - (D) Moon is a planet

निम्न में से कौन-सा वाक्य कथन नहीं है?

- (A) दो, एक से बड़ा है
 - (B) प्रत्येक श्रेणी असंख्य पदों की नहीं होती
 - (C) दिल्ली से कानपुर कितनी दूर है?
 - (D) चंद्र एक ग्रह है



5. If $a*b = a^2 + b^2 - ab + 7$, then $4*3$ equals :

यदि $a*b = a^2 + b^2 - ab + 7$, तो $4*3$ बराबर है :

(A) 32

(B) 25

(C) 27

(D) 20

6. If $y = xe^x$, then $\frac{dy}{dx}$ equals :

यदि $y = xe^x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ बराबर है :

(A) xe^x

(B) $e^x(x-1)$

(C) $e^x(x+1)$

(D) $e^x \cdot x^2$

7. If $y = \sin x \cos x$, then $\frac{dy}{dx}$ at $x = \frac{\pi}{4}$ equals :

यदि $y = \sin x \cos x$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ का मान $x = \frac{\pi}{4}$ पर है :

(A) 0

(B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

8. If $\int e^x (\sin x + \cos x) dx = \frac{p}{2} e^x \sin x + c$, then p equals :

यदि $\int e^x (\sin x + \cos x) dx = \frac{p}{2} e^x \sin x + c$ है, तो p बराबर है :

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

9. $\int \tan x \sec^2 x dx$ equals :

$\int \tan x \sec^2 x dx$ बराबर है :

(A) $\frac{\tan x}{2}$

(B) $\tan^2 \frac{x}{2}$

(C) $\frac{\tan^2 x}{2}$

(D) $\frac{\tan^2 \frac{x}{2}}{2}$



10. The degree of the differential equation $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 4 = 0$ is :

अवकल समीकरण $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + 2\frac{dy}{dx} + 4 = 0$ की घात है :

SECTION - B

ਖਣਡ - ਬ

11. Find x and y if $x + y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $x - y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

यदि $x + y = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ तथा $x - y = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ है, तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

OR/अथवा

If $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then show that $F(x) F(y) = F(x+y)$.

यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, तो दर्शाइए कि $F(x) F(y) = F(x+y)$ ।

12. Prove that $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = 4x^3 - 5$ is a bijection.

सिद्ध कीजिए कि $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, जो $f(x) = 4x^3 - 5$ द्वारा परिभाषित है, एकैकी तथा आच्छादक फलन है।



13. Evaluate : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{12-x} - x}{\sqrt{6+x} - 3}$

मान ज्ञात कीजिए : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{12-x} - x}{\sqrt{6+x} - 3}$

14. If $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

15. Using cross product, find the angle between the vectors $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$:

सदिश गुणनफल के प्रयोग से $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

16. If p and q are two statements given by :

p : 35 is a multiple of 5,

q : 35 is a multiple of 6

Write the compound statement connecting these two statements with "and" and check its validity.

यदि p तथा q दो कथन हैं जो निम्न द्वारा परिभाषित हैं :

p : 35, 5 का गुणज है,

q : 35, 6 का गुणज है

उपरोक्त कथनों को "and" द्वारा जोड़कर एक संयुक्त कथन बनाइए तथा उसकी वैधता की जाँच कीजिए।



SECTION - C

खण्ड - स

17. Express the matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ as the sum of a symmetric and skew symmetric matrix.

आव्यूह $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ को एक सममित तथा एक विषम सममित आव्यूह के योग के रूप में व्यक्त कीजिए।

18. Show that the vectors $\vec{a} - 2\vec{b}$, $3\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} + 4\vec{b}$ are coplanar.

दर्शाइए कि सदिश $\vec{a} - 2\vec{b}$, $3\vec{a} + \vec{b}$ तथा $\vec{a} + 4\vec{b}$ समतलीय हैं।

19. Using properties of determinants, prove the following :

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग कर निम्न सिद्ध कीजिए :

$$\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = a^2(a+3)$$

OR/अथवा

If $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, show that A^2 is a unit matrix of order 3.

यदि $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -3 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ है, तो दर्शाइए कि A^2 तीन कोटि का एक इकाई आव्यूह है।



20. Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\cos^{-1} \frac{4}{5} + \cos^{-1} \frac{12}{13} = \cos^{-1} \frac{33}{65}$$

21. If $f: R \rightarrow R - \{0\}$ be defined as $f(x) = \frac{x+1}{x}$ Prove that f is bijective. Hence find f^{-1} .

यदि $f: R \rightarrow R - \{0\}$, $f(x) = \frac{x+1}{x}$ द्वारा परिभाषित है, तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी आच्छादक है।

अतः f^{-1} ज्ञात कीजिए।

22. Find the value of k so that following function is continuous at $x=0$:

k का मान ज्ञात कीजिए कि निम्न फलन $x=0$ पर संतत है :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{3x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

23. If $y = x^{x \cos x} + \frac{2x+1}{2x-1}$, find $\frac{dy}{dx}$.

यदि $y = x^{x \cos x} + \frac{2x+1}{2x-1}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

24. Find the intervals in which the following functions (a) increasing (b) decreasing :
वह अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्न फलन (a) वर्धमान है (b) ह्रासमान है :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7.$$

OR/अथवा

Find the equation of normal to the curve $y=x^3$ at $(2, 8)$.

वक्र $y=x^3$ के बिंदु $(2, 8)$ पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

25. Evaluate :

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

26. Solve the following differential equation :

निम्न अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$$

27. The magnitude of the vector product of $\lambda \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ with the sum of the vectors $5\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ and $-4\hat{i} - 5\hat{j}$ is equal to $\sqrt{66}$. Find the value of λ .

यदि सदिश $\lambda \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ का सदिशों $5\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$ तथा $-4\hat{i} - 5\hat{j}$ के योग के साथ सदिश गुणन $\sqrt{66}$ है, तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

28. Find :

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}} dx$$

OR/अथवा

Find :

ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{4x+1}{(x-1)(2x+3)} dx$$



SECTION - D

खण्ड - द

29. Using matrices, solve the following system of equations :

आव्यूहों के प्रयोग से निम्न समीकरण निकाय को हल कीजिए :

$$x + 2y + z = 7, \quad x + 3z = 11, \quad 2x - 3y = 1$$

OR/अथवा

If $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, find A^{-1} and hence prove that $A^2 - 4A - 5I = 0$

यदि $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ है, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। अतः सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$

30. A rectangular sheet of tin $45 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$ is to be made into an open box from the top by cutting off corners from each corner and folding the flaps. What should be the side of square to be cut off so that volume of the box is maximum ?

45 से.मी. \times 24 से.मी. विमाएं वाले एक आयताकार टिन के कोनों से वर्गाकार काटकर तथा शेष को मोड़कर ऊपर से खुला बक्सा बनाना है। काटे गए वर्ग की भुजा ज्ञात कीजिए कि बक्से का आयतन अधिकतम हो ?

OR/अथवा

A cylinder is such that the sum of its height and circumference of its base is 10 m. Find the greatest volume of the cylinder.

एक बेलन ऐसा है कि उसकी ऊँचाई तथा उसके आधार के परिमाप का योग 10 मी. है। बेलन का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए।

31. Using integration, find the area of the region bounded by the ellipse $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

समाकलनों के प्रयोग से दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



32. Find the equation of the plane through the point $(2, 1, -3)$ and parallel to the lines

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+4}{6} \text{ and } \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, 1, -3)$ से होकर जाता है तथा रेखाओं

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+4}{6} \text{ तथा } \frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \text{ के समांतर हैं।}$$

33. An aeroplane can carry maximum of 200 passengers. A profit of ₹ 400 is made on each first class ticket and a profit of ₹ 300 is made on each economy class ticket. The airline reserves at least 20 seats for first class. However at least 4 times as many passengers prefer to travel by economy class to the first class. Determine how many each type of tickets must be sold in order to have maximum profit for the airline. Make it as an LPP and solve it graphically.

एक हवाई जहाज अधिकतम 200 यात्रियों को यात्रा करा सकता है। प्रत्येक प्रथम श्रेणी के टिकट पर ₹ 400 तथा सस्ती श्रेणी के प्रत्येक टिकट पर ₹ 300 लाभ कमाया जा सकता है। एयरलाइन कम से कम 20 सीटें प्रथम श्रेणी के लिए आरक्षित करती हैं तथापि प्रथम श्रेणी की अपेक्षा कम से कम चार गुने यात्री सस्ती श्रेणी से यात्रा करने को वरीयता देता है ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक प्रकार के कितने-कितने टिकट बेचे जाएँ ताकि लाभ का अधिकतमीकरण हो? इस समस्या को रैखिक समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए।



and a 20% increase (-1.5 mm) in mean precipitation, resulting in drier soil conditions.

1996-97

1996-97 was a year of significant rainfall, particularly in the early part of the year.

rainfall at 800 > 1000 mm. A corresponding 60% increase in rainfall was also observed, and rainfall magnitude was 30% above the 1995-96 baseline period. This rainfall increase is relevant for improved vegetation and reduced potential erosion. Irrigation was minimal, and rainfall of early summer resulted in significant soil moisture retention and reduced infiltration. Soil moisture increased from 1995-96 (1994-95) to 1996-97, reflecting a wetter soil profile and reduced soil evaporation.

Soil moisture was higher than normal for the first half of the year, but for the second half of the year, soil moisture was lower than normal. This reflects the significant rainfall event in early summer, which increased soil moisture levels, followed by a period of dry weather in late summer and autumn. The soil moisture levels were lower than normal for the remainder of the year, reflecting the lack of significant rainfall events.

1997-98

1997-98 was a year of significant rainfall, particularly in the early part of the year.

rainfall at 800 > 1000 mm. A corresponding 60% increase in rainfall was also observed, and rainfall magnitude was 30% above the 1995-96 baseline period. This rainfall increase is relevant for improved vegetation and reduced potential erosion. Irrigation was minimal, and rainfall of early summer resulted in significant soil moisture retention and reduced soil evaporation.

1998-99

1998-99 was a year of significant rainfall, particularly in the early part of the year.

rainfall at 800 > 1000 mm. A corresponding 60% increase in rainfall was also observed, and rainfall magnitude was 30% above the 1995-96 baseline period. This rainfall increase is relevant for improved vegetation and reduced potential erosion. Irrigation was minimal, and rainfall of early summer resulted in significant soil moisture retention and reduced soil evaporation.

1999-2000

1999-2000 was a year of significant rainfall, particularly in the early part of the year.

rainfall at 800 > 1000 mm. A corresponding 60% increase in rainfall was also observed, and rainfall magnitude was 30% above the 1995-96 baseline period. This rainfall increase is relevant for improved vegetation and reduced potential erosion. Irrigation was minimal, and rainfall of early summer resulted in significant soil moisture retention and reduced soil evaporation.